

Θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x + 1| + |x - 1| < 1\}.$$

- (i) **(0.5)** Δώστε το ορισμό του supremum και του infimum για το κενό σύνολο, αν αυτό θεωρηθεί ως υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ .
- (ii) **(0.5)** Είναι το σύνολο  $A$  άνω φραγμένο; Αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.
- (iii) **(0.5)** Είναι ο πραγματικός αριθμός 10 κάτω φράγμα του συνόλου  $A$ ; Αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.
- (iv) **(0.5)** Αν υπάρχουν τα  $\inf A$  και  $\sup A$ , υπολογίστε τα. Αν δεν υπάρχουν, αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν.

1) (i). Έστω  $M \in \mathbb{R}$ , θα λέγεται Supremum ενός μη κενού και α.φ. υποσύνολου του  $\mathbb{R}$ , εάν:

α. Το  $M$  είναι α.φ. του υποσύνολου αυτού

β. Το  $M \leq$  από οποιαδήποτε τυχαίο άλλο α.φ.

Έστω  $m \in \mathbb{R}$ , θα λέγεται Infimum ενός μη κενού και κφ υποσύνολου του  $\mathbb{R}$ , εάν:

α'. Το  $m$  είναι κφ το υποσύνολου αυτού

β'. Το  $m \geq$  από οποιαδήποτε τυχαίο άλλο κφ

(ii) Λόγω, ότι στο σύνολο  $A$  έχουμε ενός της σχέσης απόλυτα επιδιώκουμε να τα διώξουμε, ενώ παρατηρούμε

ότι αν  $|x+1|=0 \Leftrightarrow x=-1$  &  $|x-1|=0 \Leftrightarrow x=1$

• Για  $x \in (-\infty, -1)$ :  $|x+1| = -x-1$  &  $|x-1| = 1-x$

Επομένως, έχουμε:

$$|x+1| + |x-1| < 1 \Leftrightarrow -x-1 + 1-x < 1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$$

Άρα, σωστικά  $x \in (-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{2}, +\infty)$

• Για  $x \in (-1, 1)$ :  $|x+1| = x+1$  &  $|x-1| = 1-x$

Επομένως, έχουμε:

$$|x+1| + |x-1| < 1 \Leftrightarrow x+1 + 1-x < 1 \Leftrightarrow 2 < 1 \text{ Άτονο}$$

• Για  $x \in (1, +\infty)$ :  $|x+1| = x+1$  &  $|x-1| = x-1$

Επομένως, έχουμε:

$$|x+1| + |x-1| < 1 \Leftrightarrow x+1 + x-1 < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$$

Άρα, σωστικά  $x \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$

Συνολικώς, έχουμε ότι:

$$A = (-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{2}, +\infty) \cup (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (1, +\infty) \cup \{-1, 1\}$$

$$\Rightarrow A = (-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cup (1, +\infty) \quad \text{Το } A \text{ όχι γραγμένο}$$

Τα άκρα  $-1$  &  $1$  ανακτά, διότι δεν ενοηθεύουν την ανίσωση.

(iii) Προφανώς, το  $10$  δεν αποτελεί κφ. του  $A$  αφού μη γραγμένο

(iv) Ομοίως, και  $\text{Sup } A = +\infty$  &  $\text{Inf } A = -\infty$